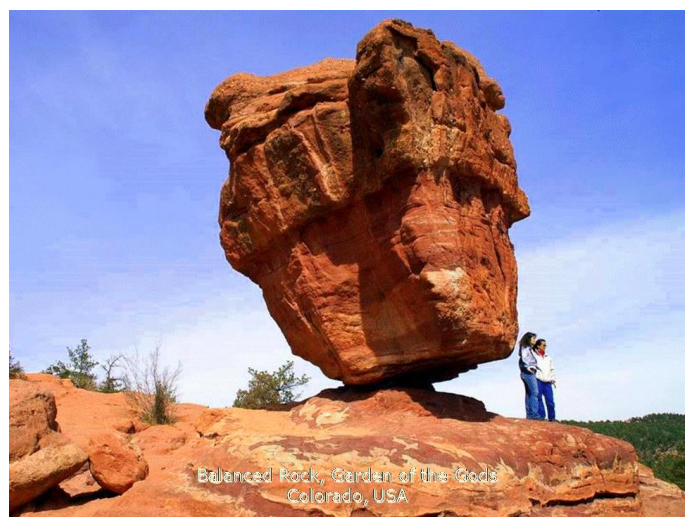
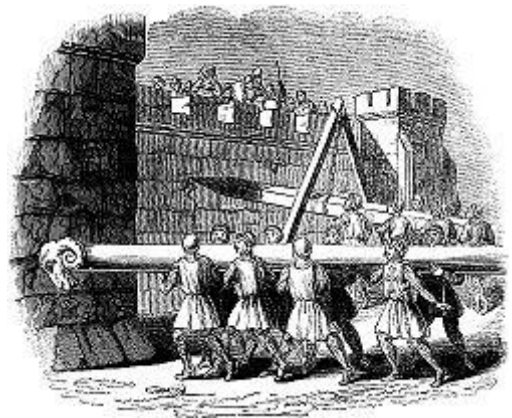


# Statique du Solide

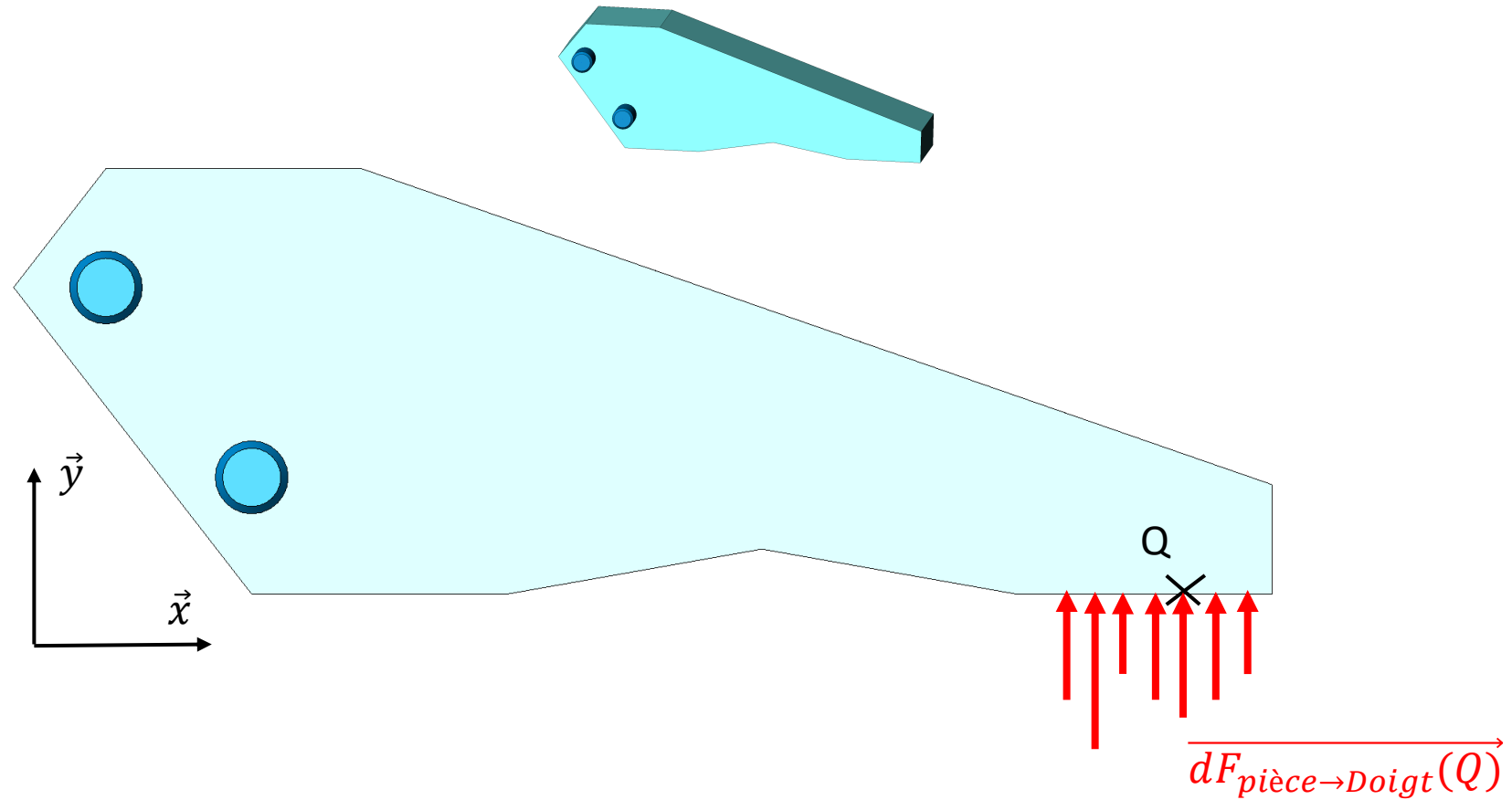


# Modélisation des Actions Mécaniques

Compétences attendues :

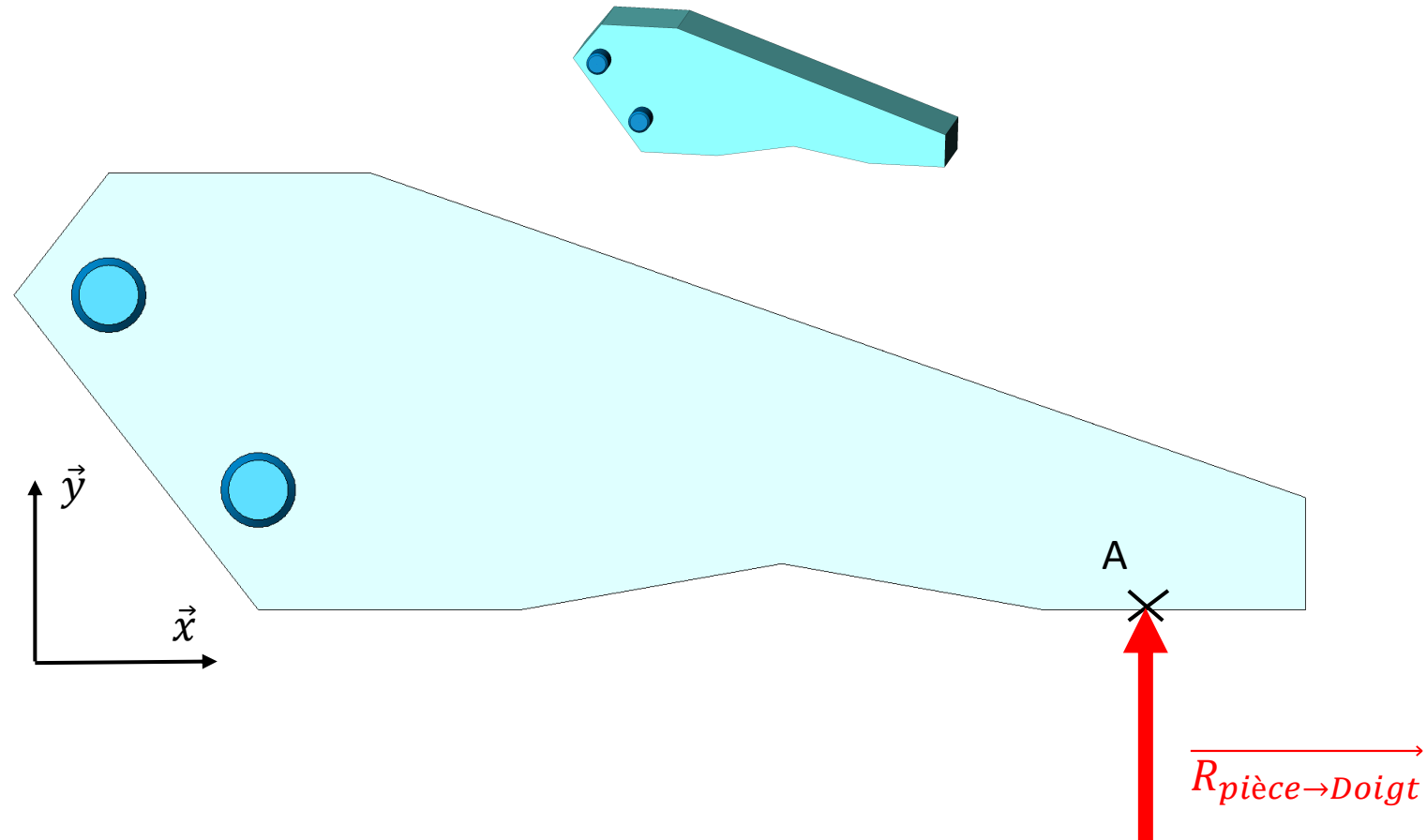
- ✓ Modéliser une action mécanique.

# Modélisation globale - locale



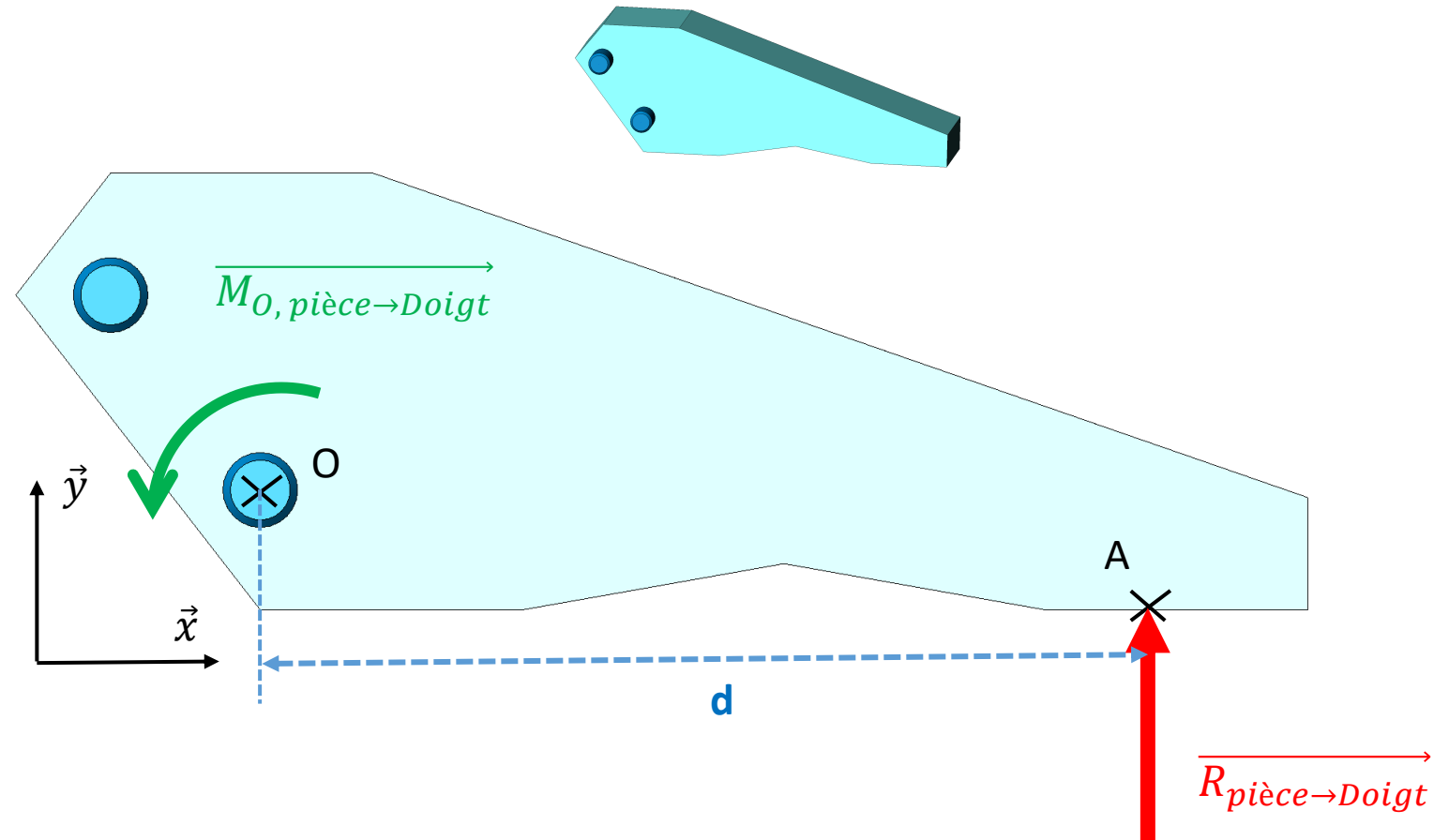
**Modèle local réalisé par des champs de vecteurs**

# Modélisation globale - locale



**Modèle global réalisé par des champs de torseurs**

# Modélisation globale - locale



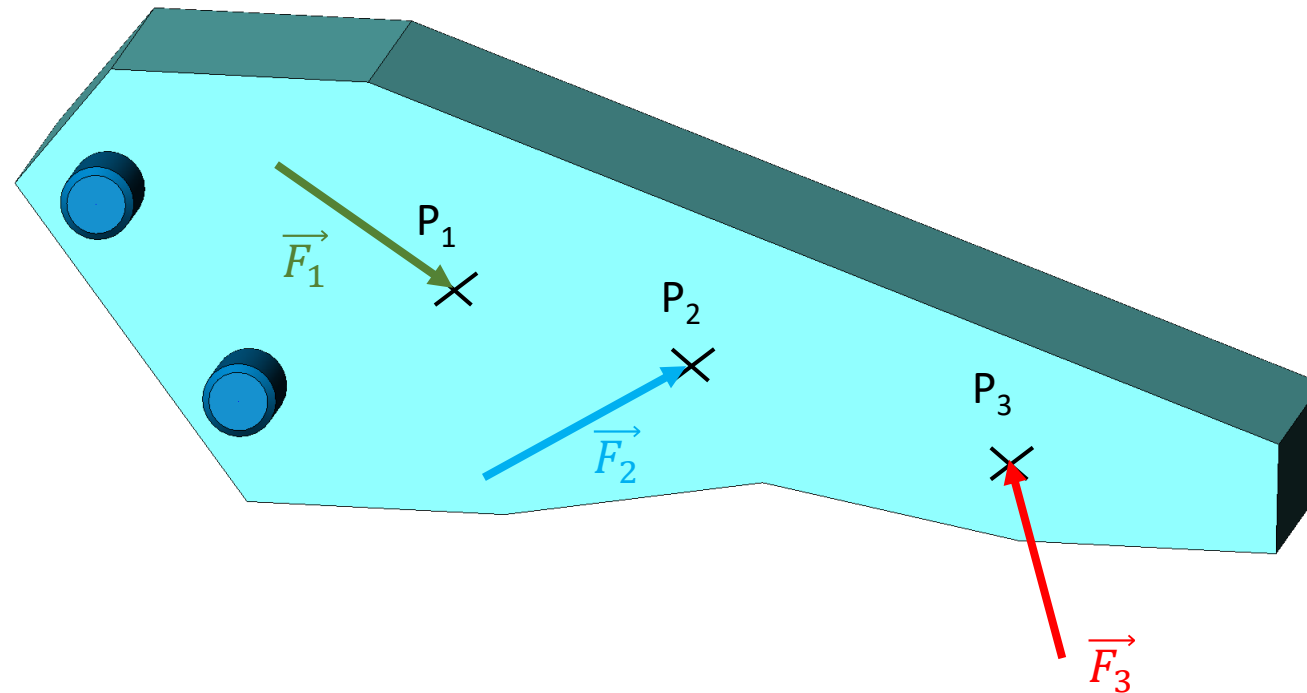
**Modèle global réalisé par des champs de torseurs**

# Modélisation globale - locale

## Répartition des actions mécaniques

Solide = Ensemble de points matériels  $P_i$

$P_i \rightarrow$  Action mécanique élémentaire  $\vec{F}_i$



# Modélisation globale - locale

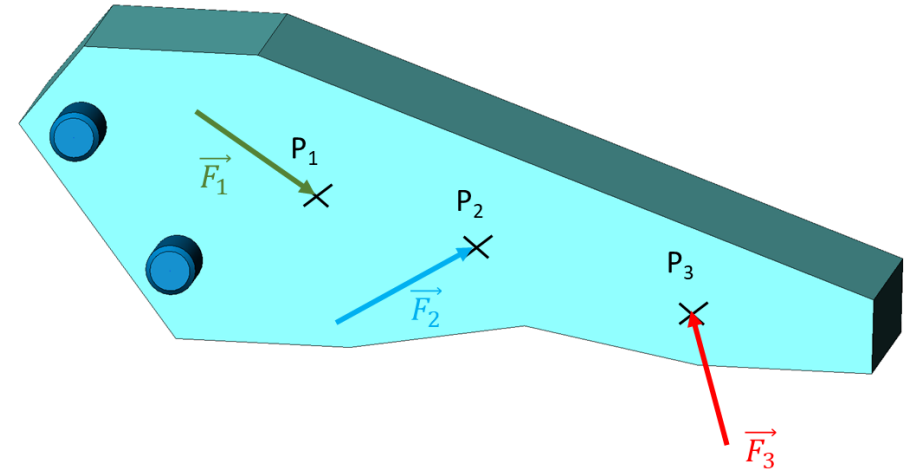
## Répartition des actions mécaniques

Effet local de l'action mécanique  $\vec{F}_i$  en  $P_i \rightarrow$  Torseur :

$$\{dT_{i \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{dR_{i \rightarrow S}} = \vec{F}_i \\ \overrightarrow{dM_{P_i, i \rightarrow S}} = \vec{0} \end{array} \right\}_{P_i}$$

Effet global de ces actions mécaniques  $\vec{F}_i \rightarrow$  Torseur :

$$\{T_{i \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{i \rightarrow S}} = \sum_i \overrightarrow{dR_{i \rightarrow S}} = \sum_i \vec{F}_i \\ \overrightarrow{M_{A, i \rightarrow S}} = \sum_i \overrightarrow{dM_{A, i \rightarrow S}} = \sum_i \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{F}_i \end{array} \right\}_A$$



# Modélisation globale - locale

## Modèle de torseur des actions mécaniques locales

Domaine  $\Omega$  :

- Un volume
- Une surface
- Une ligne

Torseur des actions mécaniques locales au point M :

$$\{dT\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{dF(M)} = \overrightarrow{eff(M)} \cdot d\Omega \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M$$

$\overrightarrow{eff(M)}$  = **densité d'efforts** (dépend de la position du point M)



# Modélisation globale - locale

## Modèle de torseur des actions mécaniques locales

### 3 cas :

- $\Omega = \text{volume} :$

$$\{dT\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{dF(M)} = \overrightarrow{eff(M)} \cdot dV \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M \quad \overrightarrow{eff(M)} = \text{densité volumique d'efforts}$$

- $\Omega = \text{surface} :$

$$\{dT\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{dF(M)} = \overrightarrow{eff(M)} \cdot dS \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M \quad \overrightarrow{eff(M)} = \text{densité surfacique d'efforts}$$

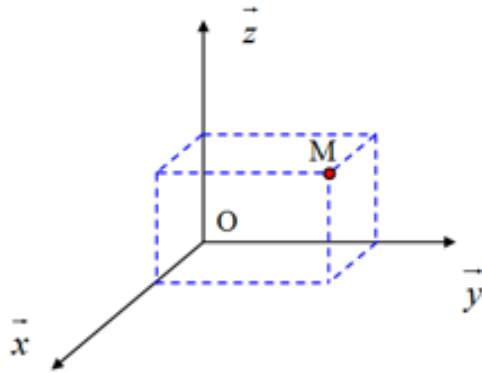
- $\Omega = \text{ligne} :$

$$\{dT\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{dF(M)} = \overrightarrow{eff(M)} \cdot dL \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M \quad \overrightarrow{eff(M)} = \text{densité linéique d'efforts}$$

# Modélisation globale - locale

## Modèle de torseur des actions mécaniques locales

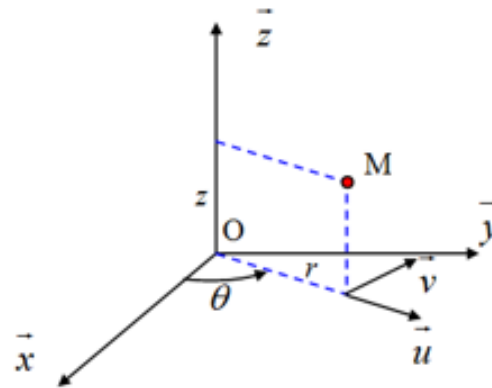
Coordonnées cartésiennes



$$dS = dx \cdot dy$$

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$

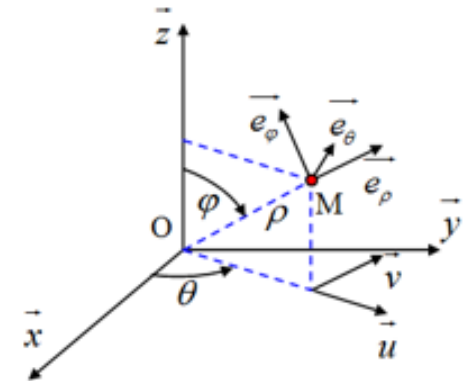
Coordonnées cylindriques



$$dS = r \cdot d\theta \cdot dz$$

$$dV = r \cdot d\theta \cdot dz \cdot dr$$

Coordonnées sphériques



$$dS = r^2 \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi \cdot d\theta$$

$$dV = r^2 \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi \cdot d\theta \cdot dr$$

**Élément d'intégration en fonction du système de coordonnées**

# Modélisation globale - locale

## Modèle de torseur des actions mécaniques globales

Torseur des actions mécaniques global en un point A

*(intégrale de l'ensemble des actions mécaniques locales en tout point du solide)*

$$\{T\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = \int_{\Omega} \overrightarrow{dF(M)} = \int_{\Omega} \overrightarrow{eff(M)} d\Omega \\ \vec{M}_A = \int_{\Omega} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{eff(M)} \cdot d\Omega \end{array} \right\}_A$$

# Modélisation globale - locale

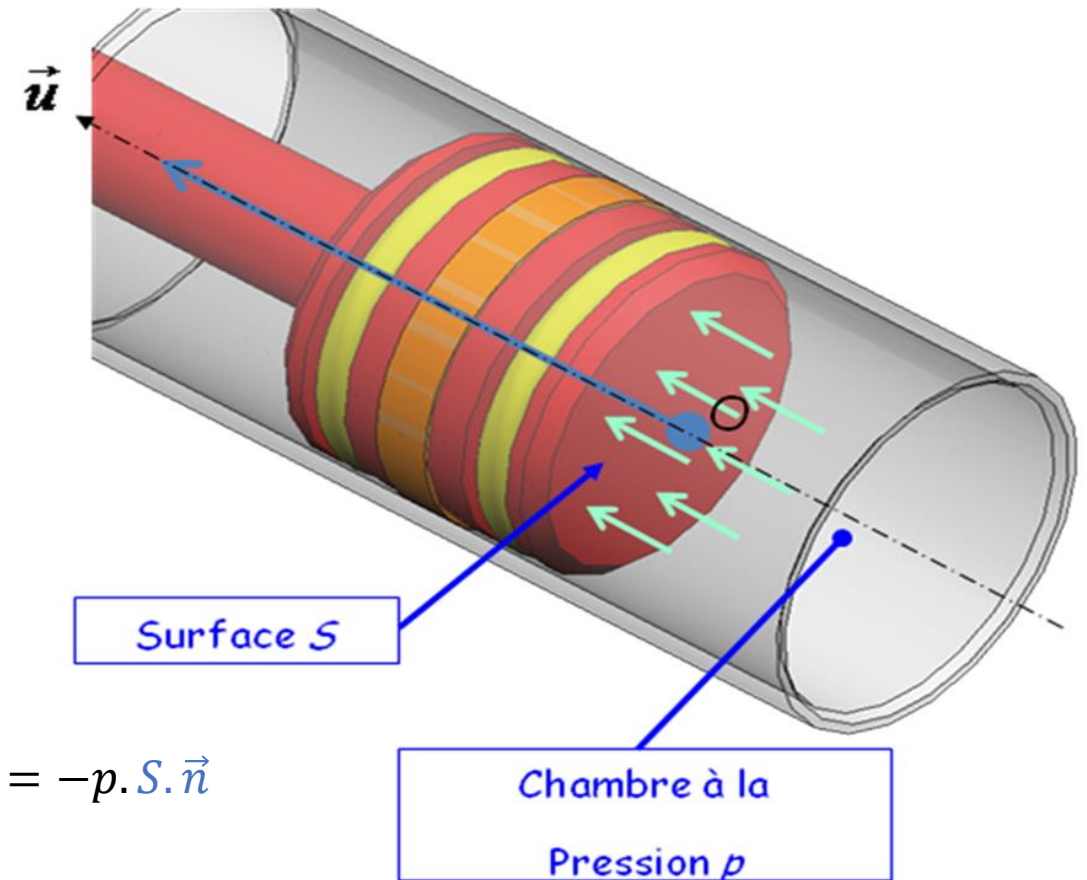
## Modèle de torseur des actions mécaniques globales

Exemple des actions d'un fluide sur un piston :

$$\{T_{\text{Fluide} \rightarrow \text{Piston}}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = \int_{M \in S} \overrightarrow{dF(M)} \\ \vec{M}_O = \int_{M \in S} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dF(M)} \end{array} \right\}_O$$

Pour tout point M de la surface utile S du piston

$$\vec{F} = \int_{M \in S} \overrightarrow{dF(M)} = \int_{M \in S} p \cdot \overrightarrow{dS(M)} = p \cdot \int_{M \in S} \overrightarrow{dS(M)} = -p \cdot \int_{M \in S} dS \cdot \vec{n} = -p \cdot S \cdot \vec{n}$$

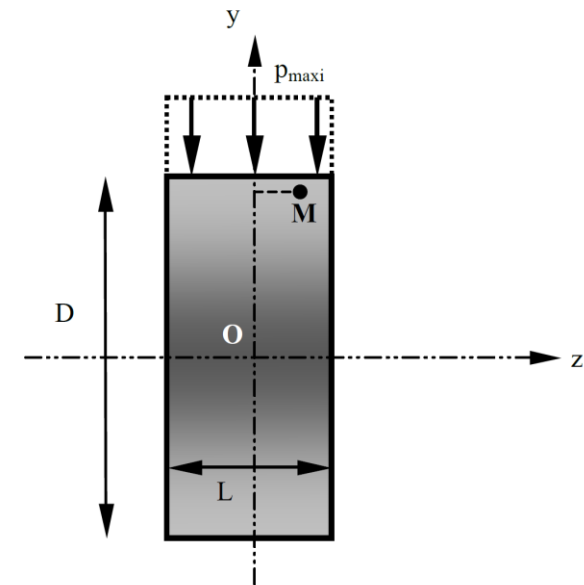
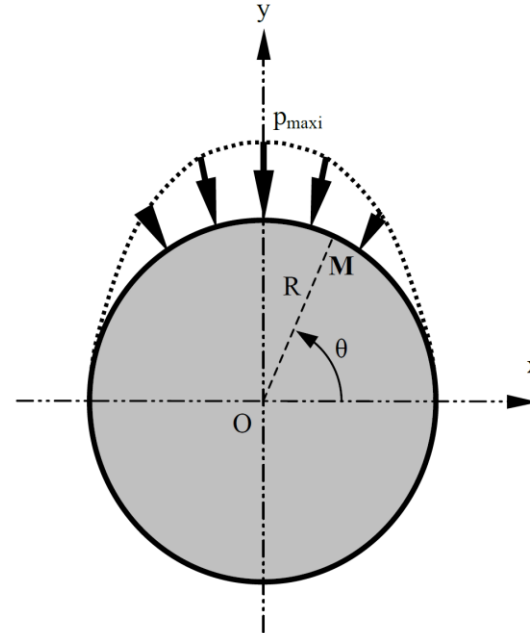


# Modélisation globale - locale

## Modèle de torseur des actions mécaniques globales

Exemple de pression sur un coussinet :

$$\{T_{Ext \rightarrow Coussinet}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = \int_{M \in S} \overrightarrow{dF(M)} \\ \vec{M}_O = \int_{M \in S} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dF(M)} \end{array} \right.$$



# Modélisation globale - locale

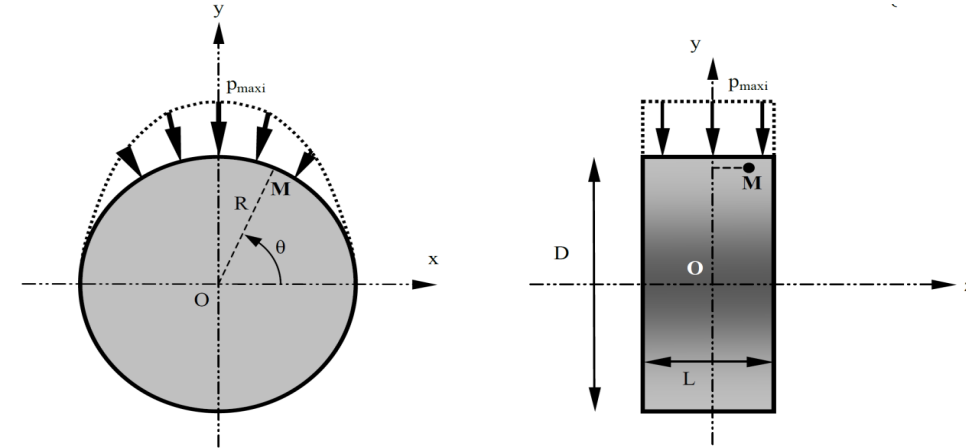
## Modèle de torseur des actions mécaniques globales

Exemple de pression sur un coussinet :

$$\vec{M}_O = \int_S \vec{OM} \wedge \overrightarrow{eff(M)}. dS = \int_S \vec{OM} \wedge -p(\theta). dS. \vec{n}$$

Avec

- $\vec{n} = \vec{e}_r$
- $dS = r. d\theta. dz$
- $0 \leq \theta \leq \pi$
- $0 \leq z \leq L$
- $\vec{OM} = r. \vec{e}_r + z. \vec{z}$



# Modélisation globale - locale

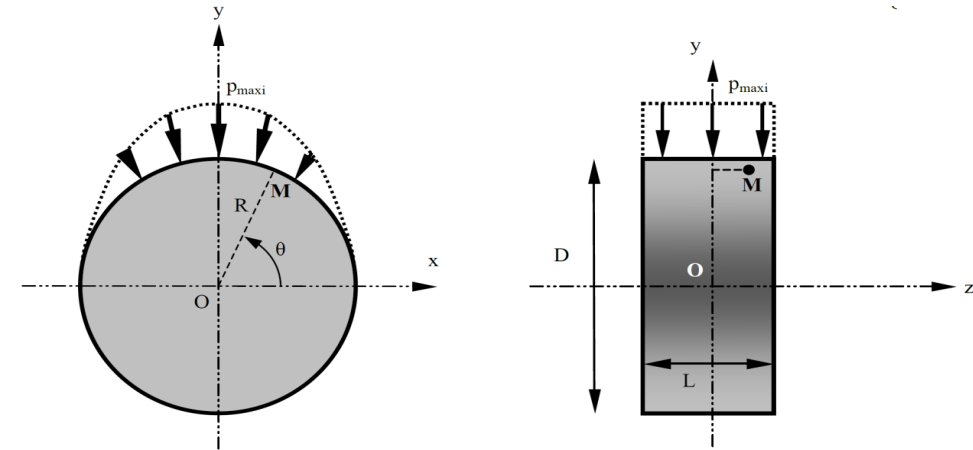
## Modèle de torseur des actions mécaniques globales

Exemple de pression sur un coussinet :

$$\vec{M}_O = \int_0^\pi \int_0^L (r \cdot \vec{e}_r + z \cdot \vec{z}) \wedge -p_M \cdot \sin(\theta) \cdot r \cdot d\theta \cdot dz \cdot \vec{e}_r$$

$$\vec{M}_O = - \int_0^\pi \int_0^L p_M \cdot \sin(\theta) \cdot r \cdot d\theta \cdot z \cdot dz \cdot \vec{e}_\theta$$

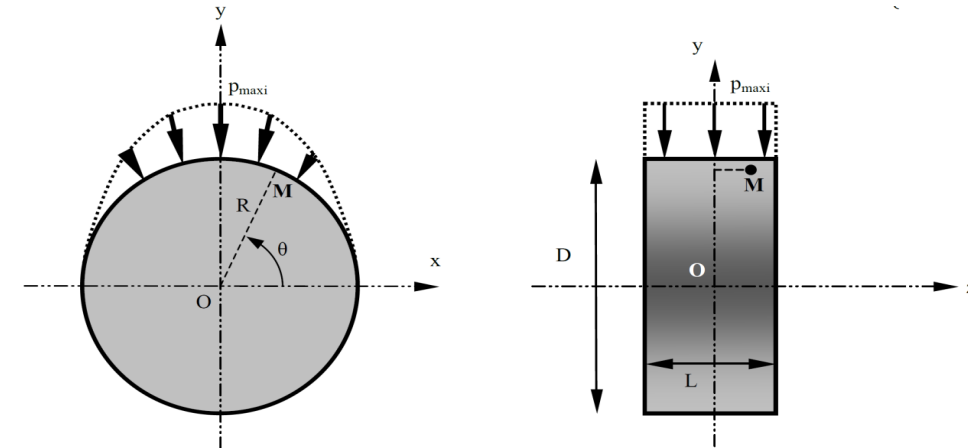
$$\vec{M}_O = - \int_0^\pi \int_0^L p_M \cdot \sin(\theta) \cdot r \cdot d\theta \cdot z \cdot dz \cdot (\sin(\theta) \cdot \vec{x} + \cos(\theta) \cdot \vec{y})$$



# Modélisation globale - locale

## Modèle de torseur des actions mécaniques globales

Exemple de pression sur un coussinet :



$$\vec{M}_O = - \int_0^\pi \int_0^L p_M \cdot \sin^2(\theta) \cdot r \cdot d\theta \cdot z \cdot dz \cdot \vec{x} - \int_0^\pi \int_0^L p_M \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot r \cdot d\theta \cdot z \cdot dz \cdot \vec{y}$$

$$\vec{M}_O = -p_M \cdot r \cdot \vec{x} \int_0^\pi \int_0^L \sin^2(\theta) \cdot d\theta \cdot z \cdot dz - p_M \cdot r \cdot \vec{y} \int_0^\pi \int_0^L \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot z \cdot dz$$



# Modélisation globale - locale

## Modèle de torseur des actions mécaniques globales

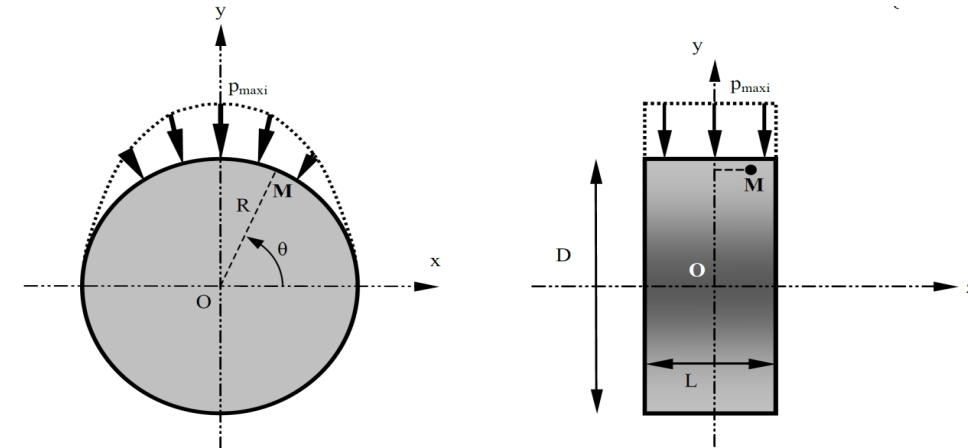
### Exemple de pression sur un coussinet :

$$\vec{M}_O = -p_M \cdot r \cdot \vec{x} \int_0^\pi \int_0^L \sin^2(\theta) \cdot d\theta \cdot z \cdot dz - p_M \cdot r \cdot \vec{y} \int_0^\pi \int_0^L \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot z \cdot dz$$

On a  $\int \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) = \left[ \frac{\sin^2(\theta)}{2} \right]$  et  $\int \sin^2(\theta) = \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]$

$$\vec{M}_O = -p_M \cdot r \cdot \vec{x} \cdot \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^L \cdot \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_0^\pi - p_M \cdot r \cdot \vec{y} \cdot \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^L \cdot \left[ \frac{\sin^2(\theta)}{2} \right]_0^\pi$$

$$\vec{M}_O = -\frac{p_M \cdot r \cdot \pi \cdot L^2}{4} \cdot \vec{x}$$



# Modélisation globale - locale

## Centre de poussée d'une répartition de forces

Définition : Le centre de poussée des actions mécaniques agissant sur le domaine  $\Omega$  et résultant de la densité d'effort  $\overrightarrow{eff}(M)$  est le point  $P$  tel que :

$$\{T_{f \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{f \rightarrow S}} = \int_{\Omega} \overrightarrow{eff}(M) d\Omega \\ \overrightarrow{M_{P, f \rightarrow S}} = \vec{0} \end{array} \right\}_P$$

Remarque : Centre de poussée des actions mécaniques de pesanteur = Centre de gravité.

# Modélisation globale - locale

## Centre de poussée d'une répartition de forces

Trouver la position du point P : (Condition de nullité du moment en P) :

$$\overrightarrow{M_{P,f \rightarrow S}} = \int_{\Omega} \overrightarrow{PM} \wedge \overrightarrow{eff(M)}. d\Omega = \vec{0}$$

Position / Origine du repère.

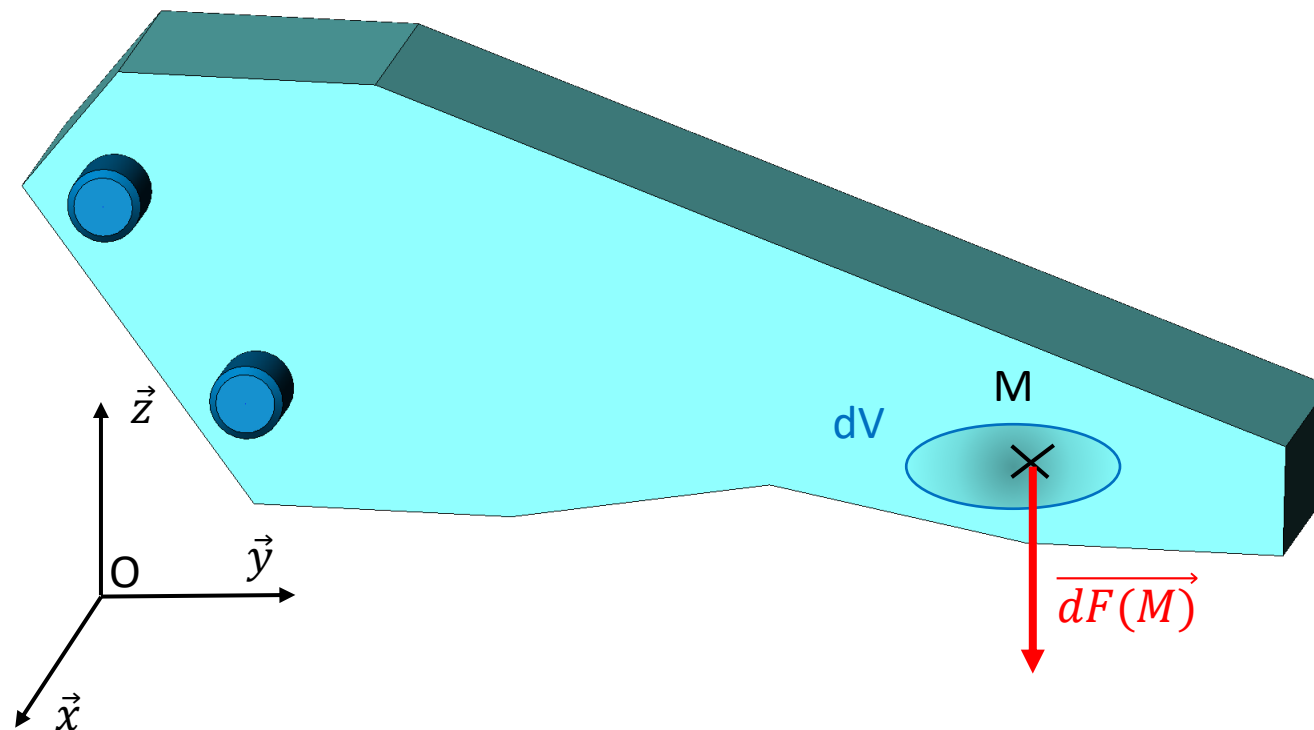
$$\int_{\Omega} (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}) \wedge \overrightarrow{eff(M)}. d\Omega = \vec{0}$$

$$\int_{\Omega} \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{eff(M)}. d\Omega = \int_{M \in S} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{eff(M)}. d\Omega$$

$$\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{R_{f \rightarrow S}} = \int_{M \in S} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{eff(M)}. d\Omega$$

# Modélisation des actions mécaniques à distance

Modélisation des actions mécaniques de pesanteur



# Modélisation des actions mécaniques à distance

## Modélisation des actions mécaniques de pesanteur

Pesanteur → Répartition volumique d'effort :

$$\overrightarrow{eff}(M) = -\rho \cdot g \cdot \vec{z} \text{ avec } \vec{z} \text{ vertical ascendant.}$$

$g$  : accélération de la pesanteur ( $\text{m/s}^2$ )

$\rho$  : masse volumique du corps ( $\text{kg/m}^3$ )

$$\{dT_{pes \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{dR}_{pes \rightarrow S} = -\rho \cdot g \cdot dV \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M$$

$$\{T_{pes \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{pes \rightarrow S} = \int_{M \in S} -\rho \cdot g \cdot dV \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{M}_{O, pes \rightarrow S} = \int_{M \in S} \overrightarrow{OM} \wedge -\rho \cdot g \cdot dV \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_O$$

# Modélisation des actions mécaniques à distance

## Modélisation des actions mécaniques de pesanteur

Si G = Centre de gravité :

$$\{T_{pes \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{pes \rightarrow S}} = \int_{M \in S} -\rho \cdot g \cdot dV \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{M_{G, pes \rightarrow S}} = \int_{M \in S} \overrightarrow{GM} \wedge -\rho \cdot g \cdot dV \cdot \vec{z} = \vec{0} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{pes \rightarrow S}} = \vec{P} \\ \overrightarrow{M_{G, pes \rightarrow S}} = \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

$\vec{P}$  = Poids du solide S.

$$\overrightarrow{R_{pes \rightarrow S}} = \int_{M \in S} -\rho \cdot g \cdot dV \cdot \vec{z} = -\rho \cdot g \cdot \int_{M \in S} dV \cdot \vec{z} = -\rho \cdot g \cdot V \cdot \vec{z} = -m \cdot g \cdot \vec{z}$$

# Modélisation des actions mécaniques à distance

Modélisation des actions mécaniques de pesanteur

Définition du centre de gravité d'un solide

Centre de gravité G du solide S :

$$\int_{M \in S} \overrightarrow{GM} \cdot dm = \int_{M \in S} \overrightarrow{GM} \cdot \rho \cdot dV = \vec{0}$$

$$\int_{M \in S} \overrightarrow{GM} \cdot dm = \int_{M \in S} (\overrightarrow{G0} + \overrightarrow{0M}) \cdot dm = \vec{0} \rightarrow \int_{M \in S} \overrightarrow{0G} \cdot dm = \int_{M \in S} \overrightarrow{0M} \cdot dm \rightarrow m \cdot \overrightarrow{0G} = \int_{M \in S} \overrightarrow{0M} \cdot dm$$

$$\overrightarrow{0G} = \frac{1}{m} \cdot \int_{M \in S} \overrightarrow{0M} \cdot dm$$

# Modélisation des actions mécaniques à distance

Modélisation des actions mécaniques de pesanteur

Définition du centre de gravité d'un solide

Coordonnées de G dans le repère  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$x_G = \frac{1}{m} \cdot \int_{M \in S} x \cdot dm \quad y_G = \frac{1}{m} \cdot \int_{M \in S} y \cdot dm \quad z_G = \frac{1}{m} \cdot \int_{M \in S} z \cdot dm$$

Remarque : Solide S = Ensemble de masses discrètes  $m_i$  de centres de gravité  $G_i$  :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \cdot \sum_i m_i \overrightarrow{OG_i}$$



# Modélisation des actions mécaniques à distance

Modélisation des actions mécaniques de pesanteur

*Théorèmes de Guldin*

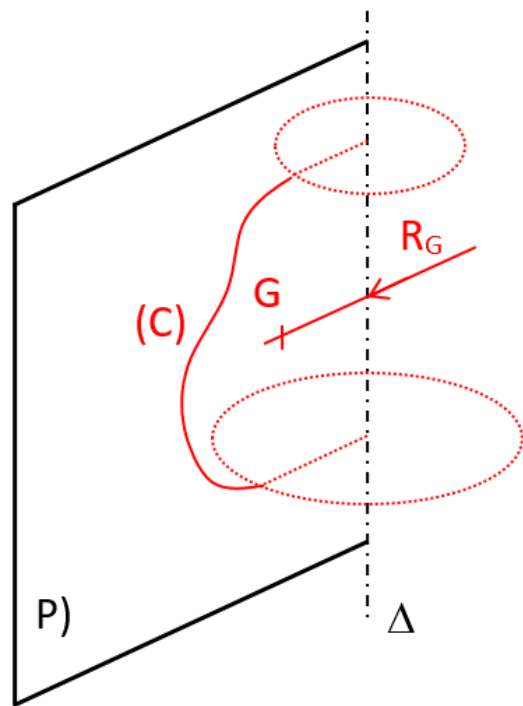
## **Premier théorème de Guldin :**

L'aire de la surface engendrée par une courbe plane  $C$  tournant autour d'un axe  $\Delta$  de son plan  $P$ , ne la traversant pas, est égale au produit de la longueur  $L$  de la courbe par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité.

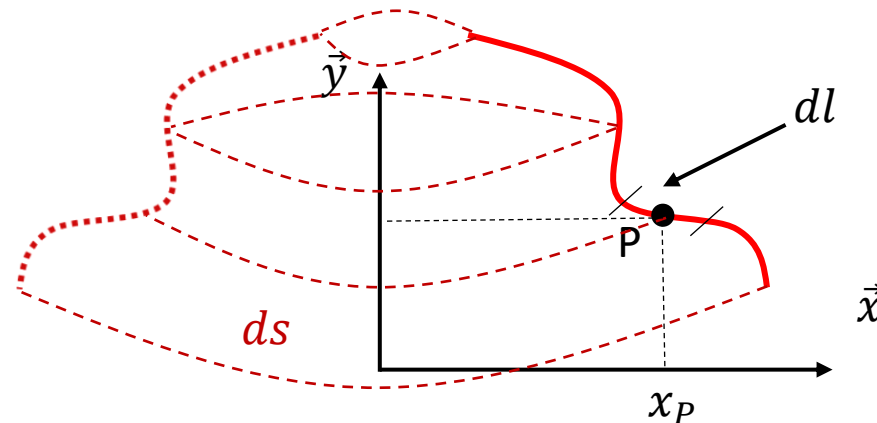
# Modélisation des actions mécaniques à distance

Modélisation des actions mécaniques de pesanteur

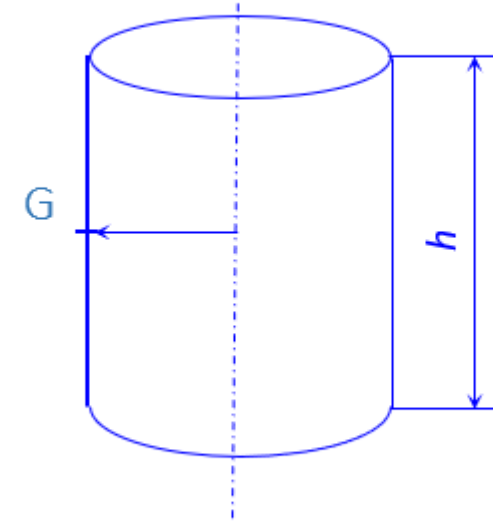
Théorèmes de Guldin



$$S = 2 \cdot \pi \cdot R_G \cdot L$$



Application : Calcul de la surface d'un cylindre de révolution



$$S = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$$

# Modélisation des actions mécaniques à distance

Modélisation des actions mécaniques de pesanteur

*Théorèmes de Guldin*

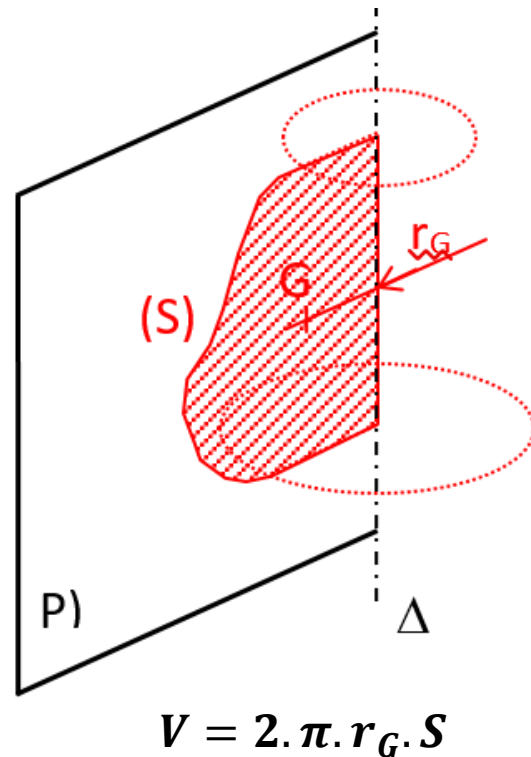
## **Deuxième théorème de Guldin :**

Le volume engendré par une surface  $S$  plane tournant autour d'un axe  $\Delta$  de son plan, ne la traversant pas, est égal au produit de l'aire de la surface par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité.

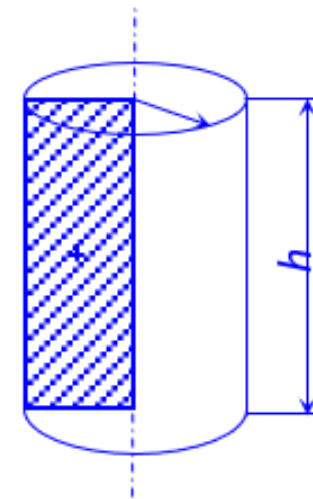
# Modélisation des actions mécaniques à distance

Modélisation des actions mécaniques de pesanteur

Théorèmes de Guldin



Application : Calcul du volume d'un cylindre



$$V = 2 \cdot \pi \cdot \frac{R}{2} \cdot R \cdot h$$

# Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

## Modèle du contact parfait

### Hypothèses

- Les pièces mécaniques sont des solides indéformables.
- Les surfaces sont géométriquement parfaites.
- Les jeux sont nuls.
- **Le contact est sans frottement, ni adhérence.**

# Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

Modèle du contact parfait

Conséquence : La puissance des efforts de liaison = comoment de torseur :

$$P_{i \rightarrow j} = \{T_{i \rightarrow j}\} \otimes \{V_{i/j}\} = \overrightarrow{R_{i \rightarrow j}} \cdot \overrightarrow{V_{M \in i/j}} + \overrightarrow{\Omega_{i/j}} \cdot \overrightarrow{M_{M, i \rightarrow j}} = 0$$

$$P_{i \rightarrow j} = \begin{pmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{pmatrix}_{M,R} \otimes \begin{pmatrix} \Omega_x & V_x \\ \Omega_y & V_y \\ \Omega_z & V_z \end{pmatrix}_{M,R} = X \cdot V_x + Y \cdot V_y + Z \cdot V_z + L \cdot \Omega_x + M \cdot \Omega_y + N \cdot \Omega_z$$

# Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

## Modèle du contact parfait

Exemple : Liaison Pivot d'axe  $\vec{x}$  entre les solides 1 et 2 :

$$P_{1 \rightarrow 2} = \{T_{1 \rightarrow 2}\} \otimes \{V_{1/2}\} = \begin{pmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{pmatrix}_{M,R} \otimes \begin{pmatrix} \Omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{M,R} = 0$$

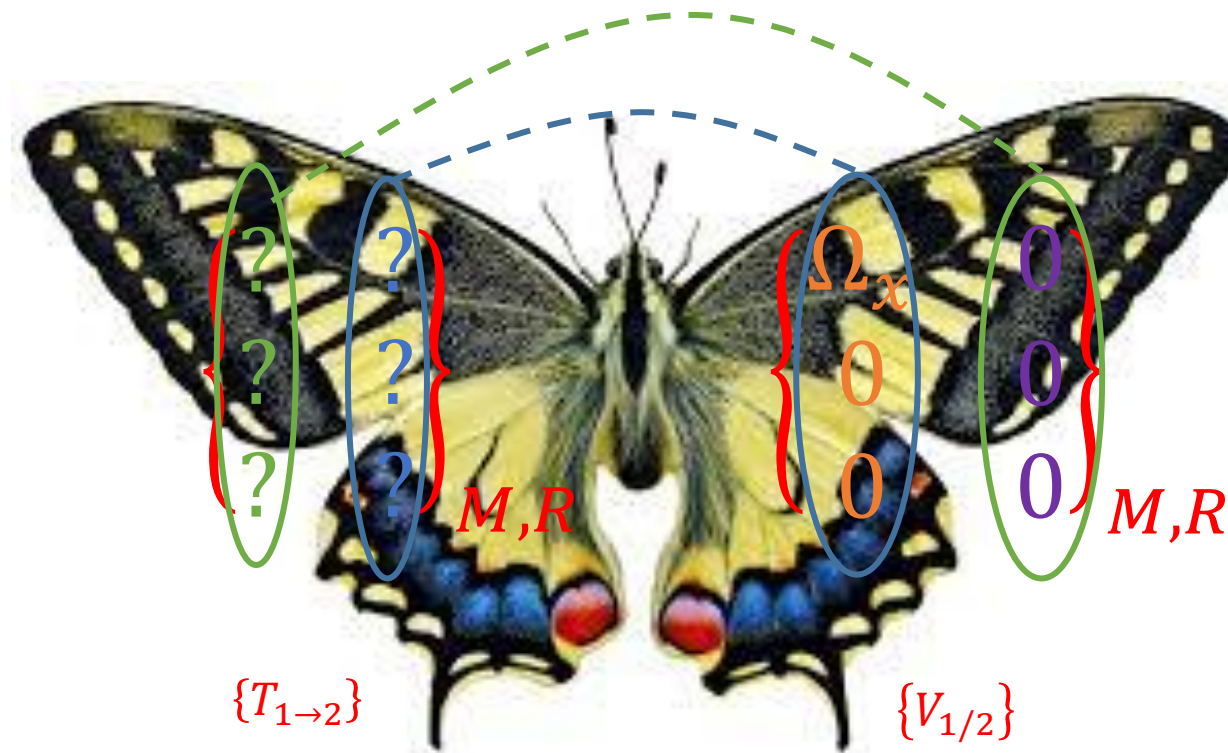
$$P_{i \rightarrow j} = X \cdot 0 + Y \cdot 0 + Z \cdot 0 + L \cdot \Omega_x + M \cdot 0 + N \cdot 0 = 0 \text{ donc } L \cdot \Omega_x = 0, \forall \Omega_x \text{ donc } L = 0$$

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{pmatrix}_{M,R}$$

# Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

## Modèle du contact parfait

Exemple : Liaison Pivot d'axe  $\vec{x}$  entre les solides 1 et 2 :

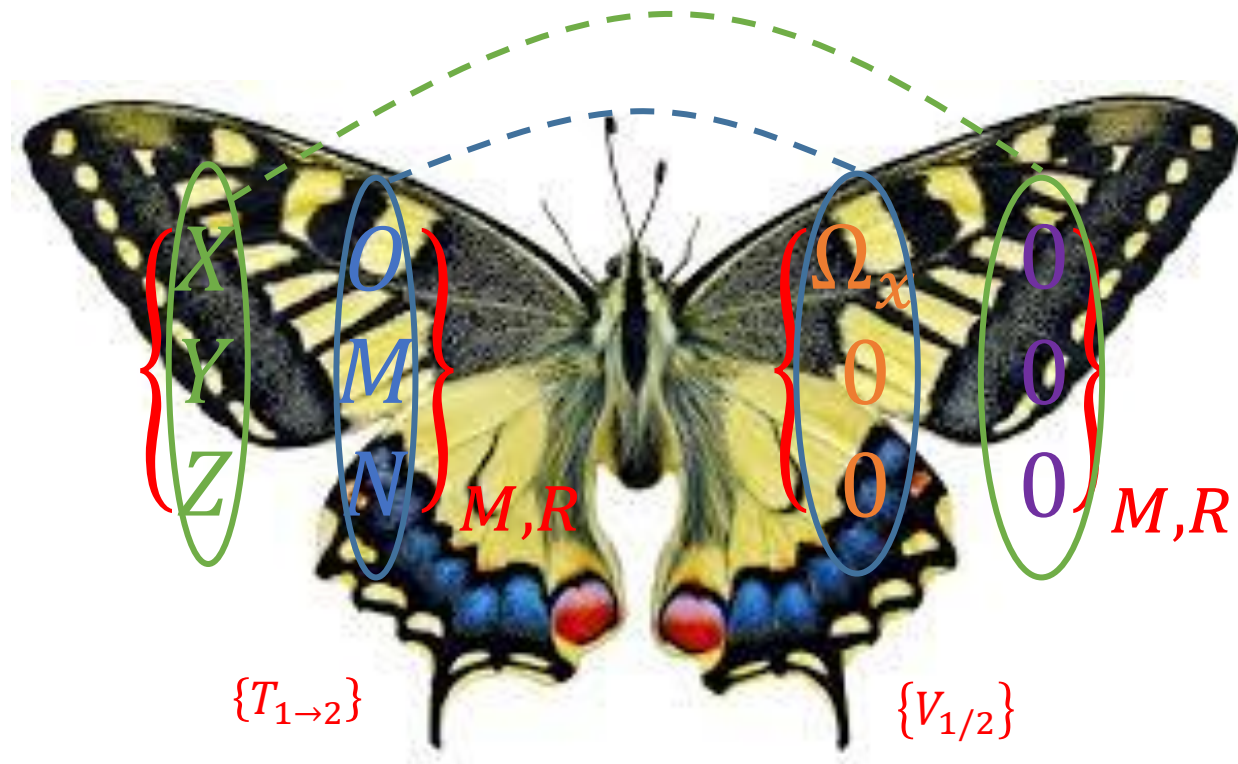




# Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

## Modèle du contact parfait

Exemple : Liaison Pivot d'axe  $\vec{x}$  entre les solides 1 et 2 :



# Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

## Modèle du contact parfait

Exemple : Liaison Hélicoïdale d'axe  $\vec{x}$  entre les solides 1 et 2 :

$$P_{1 \rightarrow 2} = \{T_{1 \rightarrow 2}\} \otimes \{V_{1/2}\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{M,R} \otimes \begin{Bmatrix} \Omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{M,R} = 0$$

Avec  $V_x = \Omega_x \cdot \frac{pas}{2\pi}$

$$P_{i \rightarrow j} = X \cdot V_x + L \cdot \Omega_x = 0 \quad \forall (\Omega_x, V_x) \text{ or } V_x = \Omega_x \cdot \frac{pas}{2\pi} \text{ donc } L = -X \cdot \frac{pas}{2\pi}$$

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{M,R}$$

Avec  $L = -X \cdot \frac{pas}{2\pi}$

# Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

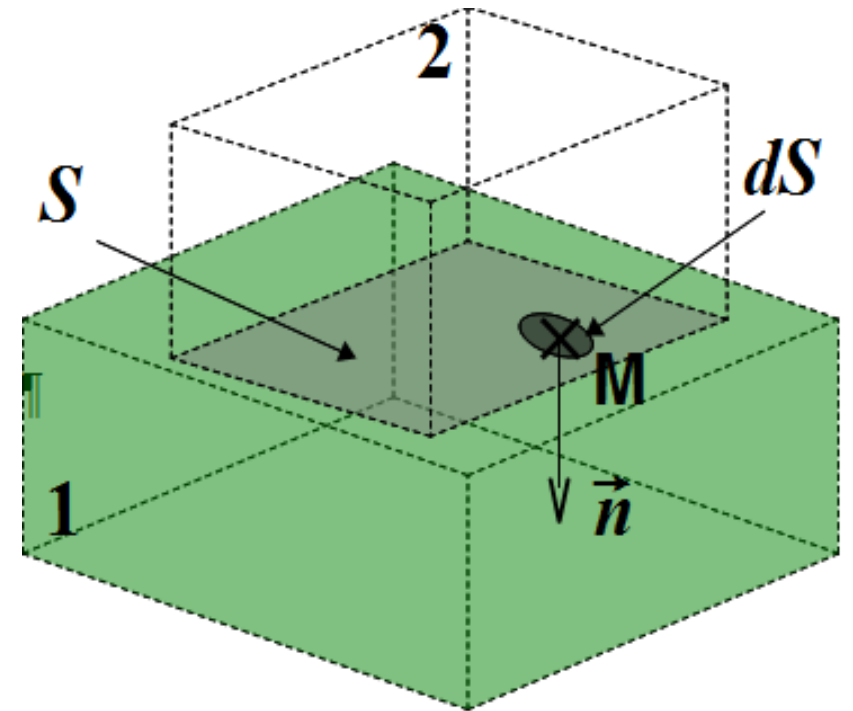
## Modèle du contact parfait

Hypothèses → Efforts transmis entre 2 solides → perpendiculaires au plan tangent commun aux 2 solides.

- On isole  $S_2$
- $\overrightarrow{dF_{1 \rightarrow 2}}(M)$  = AM élémentaire exercée par  $S_1$  sur  $S_2$  en M.
- $\overrightarrow{dF_{1 \rightarrow 2}}(M)$  → dirigée vers l'intérieur du solide isolé

$$\overrightarrow{dF_{1 \rightarrow 2}}(M) = -p(M) \cdot dS \cdot \vec{n}(M)$$

- $p(M)$  = pression de contact au point M (Pa = N/m<sup>2</sup>)
- $\vec{n}(M)$  = vecteur unitaire normal au plan tangent commun en M, orienté vers l'extérieur du solide isolé.

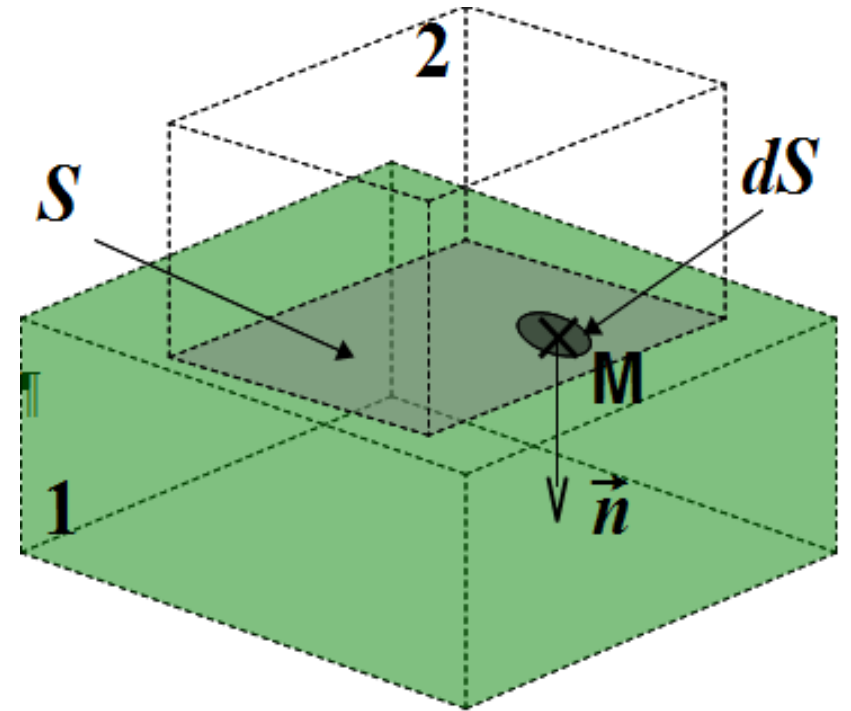


# Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

## Modèle du contact parfait

- Torseur global des actions mécaniques exercé par  $S_1$  sur  $S_2$  en  $O$  :

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} = \int_{M \in S} -p(M) \cdot dS \cdot \vec{n}(M) \\ \overrightarrow{M_{O,1 \rightarrow 2}} = \int_{M \in S} \overrightarrow{OM} \wedge -p(M) \cdot dS \cdot \vec{n}(M) \end{array} \right\}_O$$



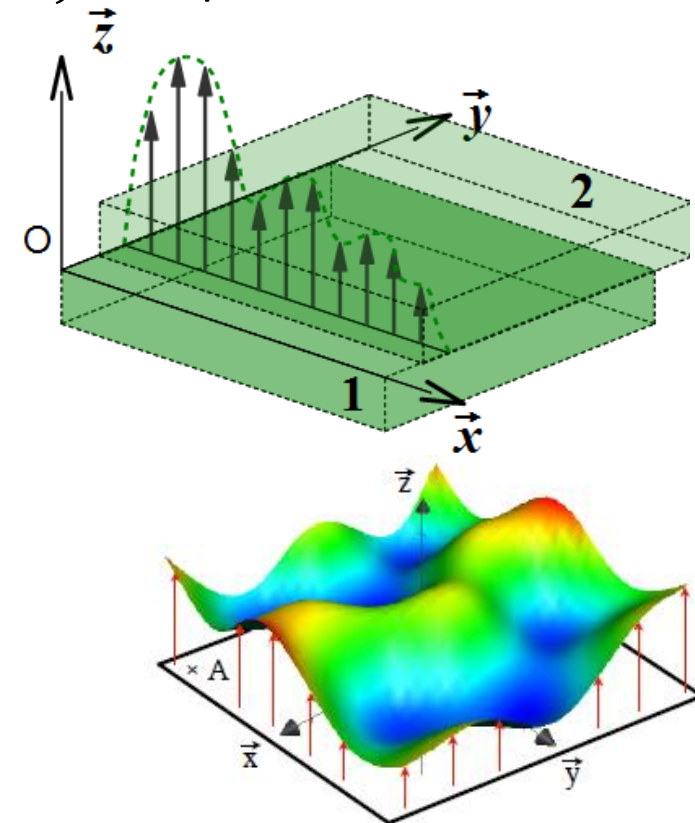
# Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

## Actions mécaniques dans une liaison parfaite

Considérons une liaison appui-plan de normale  $\vec{z}$  avec  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  un repère local.

Torseur des actions mécaniques exercées par 1 sur 2

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{O, 1 \rightarrow 2}} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{ll} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array} \right\}_{(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$



# Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

Actions mécaniques dans une liaison parfaite

Détermination de la forme du torseur : passage local-global

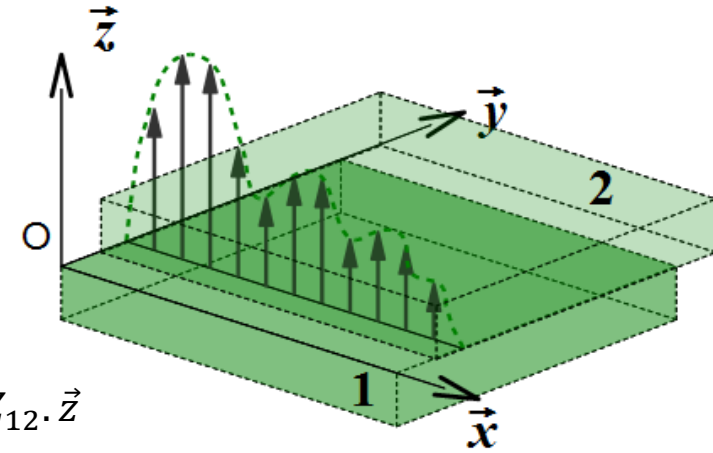
$$\overrightarrow{dF_{1 \rightarrow 2}}(M) = -p(M) \cdot dS \cdot \vec{n}(M)$$

$$\overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} = \int_{M \in S} -p(M) \cdot dS \cdot \vec{n}(M) = \int_{M \in S} -p(M) \cdot dS \cdot \vec{z} = Z_{12} \cdot \vec{z}$$

avec  $\vec{n}(M) = \vec{z}$  pour tout point M

$$\overrightarrow{M_{O,1 \rightarrow 2}} = \int_{M \in S} \overrightarrow{OM} \wedge -p(M) \cdot dS \cdot \vec{n}(M) = \int_{M \in S} (x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y}) \wedge -p(M) \cdot dS \cdot \vec{z} = \int_{M \in S} (x \cdot p(M) \cdot dS \cdot \vec{y} - y \cdot p(M) \cdot dS \cdot \vec{x}) = M_{12} \cdot \vec{y} + L_{12} \cdot \vec{x}$$

$$\rightarrow \{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{pmatrix} 0 & L_{12} \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{pmatrix}_{(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

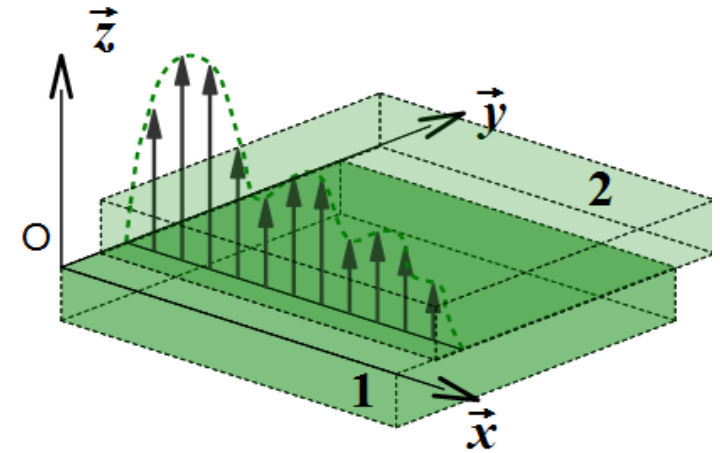


# Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

Actions mécaniques dans une liaison parfaite

Détermination de la forme du torseur : complémentarité cinématique-statique

$\{T_{1 \rightarrow 2}\}$  se déduit directement de  $\{V_{2/1}\}$



# Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

Action hydrostatique d'un fluide sur un solide

**Les forces de pression exercent une action mécanique perpendiculairement à la surface du solide sur laquelle elles agissent.**

La pression au point M varie selon la loi :  $p(z) = \rho \cdot g \cdot z + cste$



# Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

## Action hydrostatique d'un fluide sur un solide

### Exemple :

$\rho$  : masse volumique du fluide

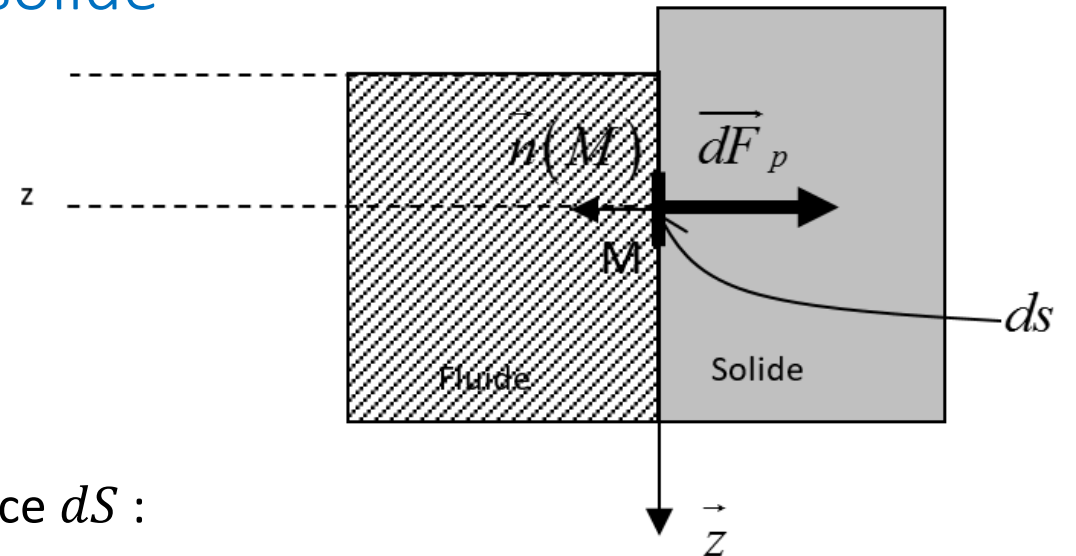
$g$  : accélération de la pesanteur

$z$  : altitude du point M (axe  $\vec{z}$  vertical descendant)

Effort élémentaire  $\overrightarrow{dF_p}$  qui agit sur un élément de surface  $dS$  :

$$\overrightarrow{dF_p} = -p(M) \cdot dS \cdot \vec{n}(M)$$

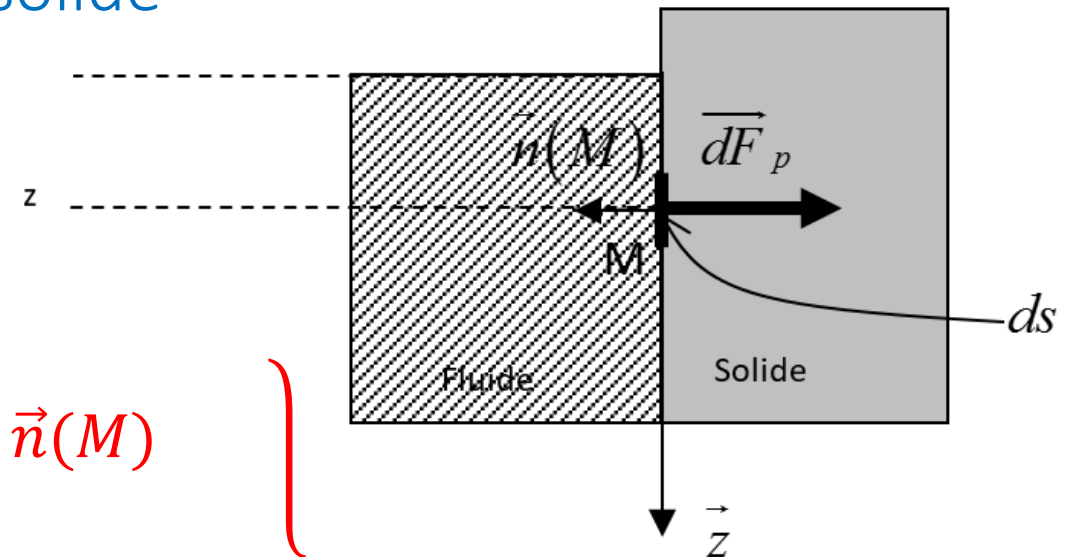
$\vec{n}(M)$  : vecteur normal en M dirigé vers l'extérieur du solide isolé



# Modélisation des actions mécaniques, hypothèse du contact parfait

Action hydrostatique d'un fluide sur un solide

Surface libre du fluide :  $z=0$



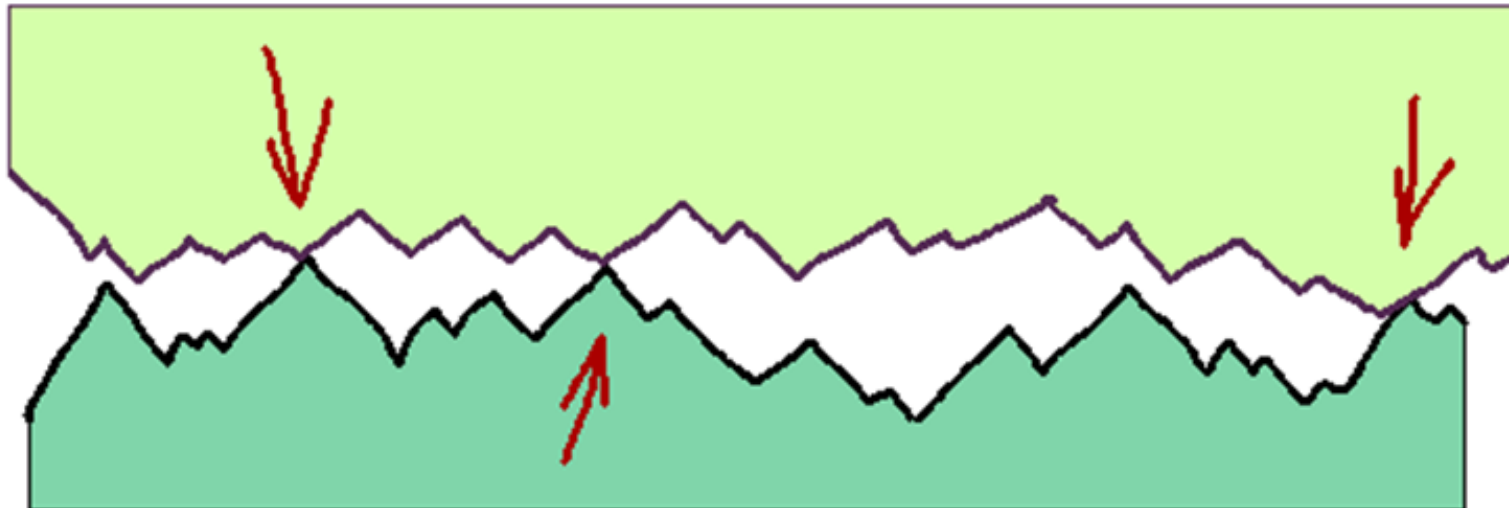
$$\{T_{Fluide \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{Fluide \rightarrow S} = \int_{MES} -p(M) \cdot dS \cdot \vec{n}(M) \\ \vec{M}_{O,Fluide \rightarrow S} = \int_{MES} \vec{OM} \wedge -p(M) \cdot dS \cdot \vec{n}(M) \end{array} \right\}_O$$

# Modélisation locale des actions mécaniques de contact avec frottement

Contact surfacique ou linéique avec frottement

Modèle local avec frottement

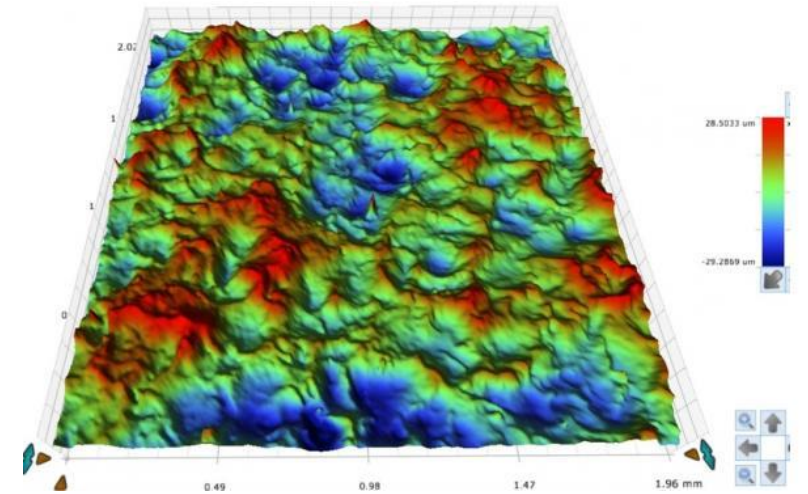
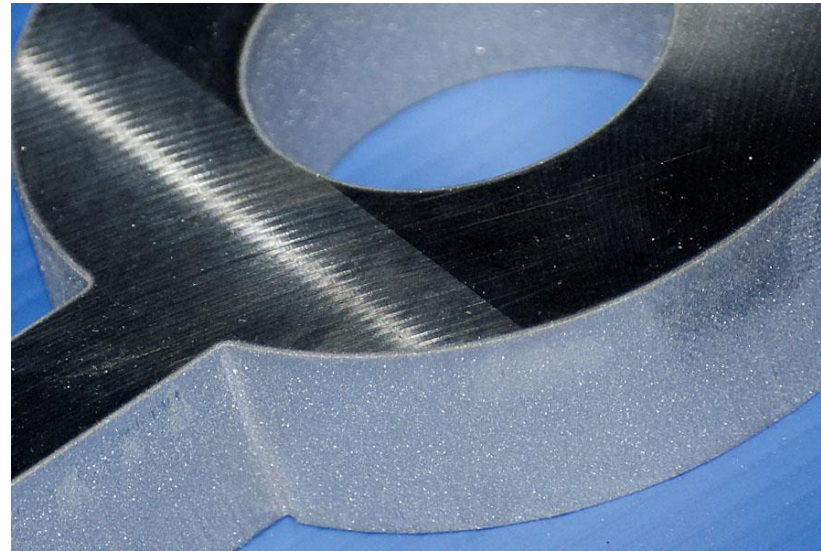
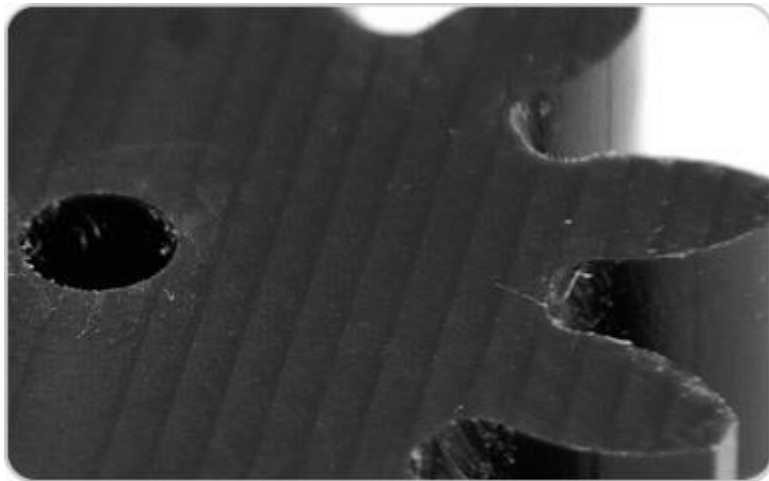
Etude du phénomène de frottement au niveau local



# Modélisation locale des actions mécaniques de contact avec frottement

Contact surfacique ou linéique avec frottement

Modèle local avec frottement



# Modélisation locale des actions mécaniques de contact avec frottement

## Contact surfacique ou linéique avec frottement

### Modèle local avec frottement

$$\{dT_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{dF_{1 \rightarrow 2}}(P) = \overrightarrow{eff}(P)d\Omega \\ \vec{0} \end{array} \right\}_P \quad \overrightarrow{eff}(P) = \text{densité d'efforts en P.}$$

- Si contact linéique,  $\overrightarrow{eff}(P)$  = densité linéique d'efforts (N/m)
- Si contact surfacique,  $\overrightarrow{eff}(P)$  = densité surfacique d'efforts (N/m<sup>2</sup>)

Rappel : Contact parfait  $\rightarrow \overrightarrow{eff}(P) = -p(P) \cdot \vec{n}(P)$

$$\overrightarrow{eff}(P) = -p(P) \cdot \vec{n}(P) + \vec{q}(P)$$

$p(P)$  = densité normale d'efforts ou pression de contact au point P.

$\vec{q}(P)$  = densité tangentielle d'effort au point P, tangent au plan de contact.

# Modélisation locale des actions mécaniques de contact avec frottement

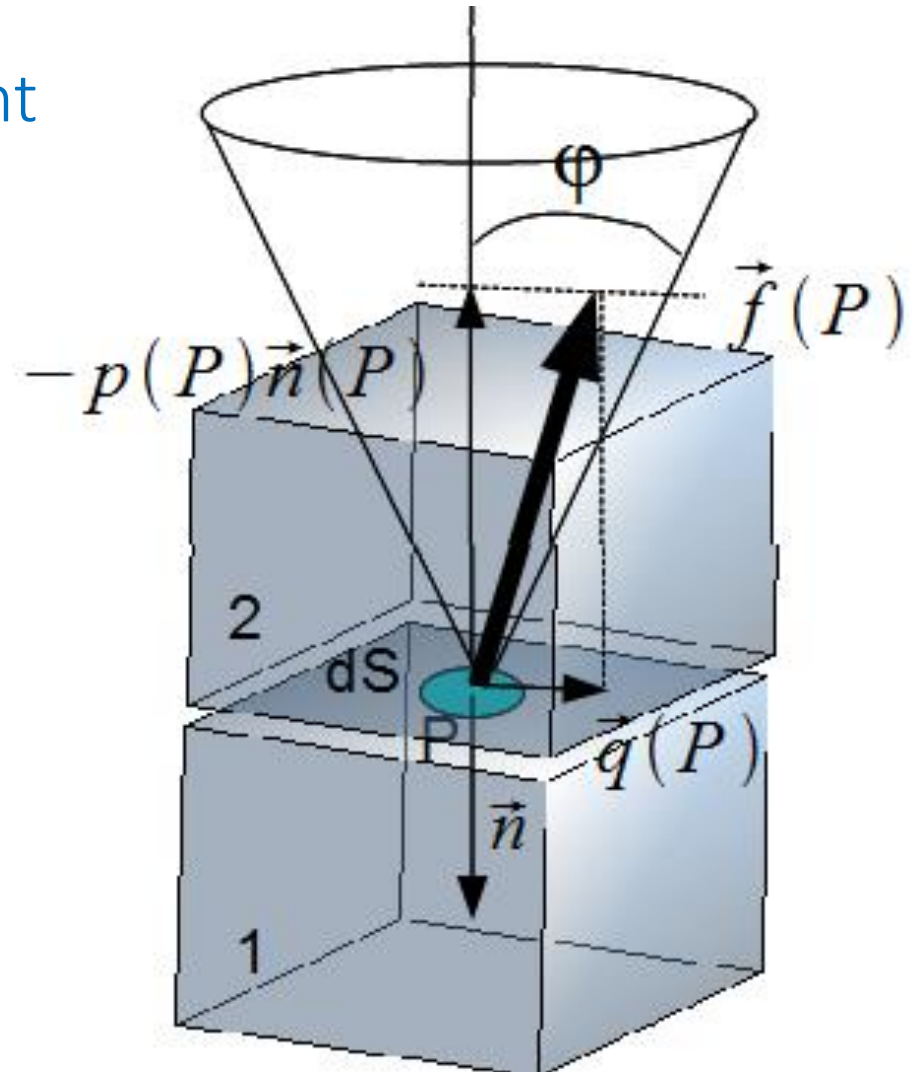
Contact surfacique ou linéique avec frottement

Lois de Coulomb locales

Lois de Coulomb locales  $\rightarrow$  les mêmes (densités d'efforts)

$\vec{t}(P)$  = Vecteur unitaire directeur de la vitesse de glissement  $\overrightarrow{V_{P \in 2/1}}$  :

$$\vec{t}(P) = \frac{\overrightarrow{V_{P \in 2/1}}}{\|\overrightarrow{V_{P \in 2/1}}\|}$$





# Modélisation locale des actions mécaniques de contact avec frottement

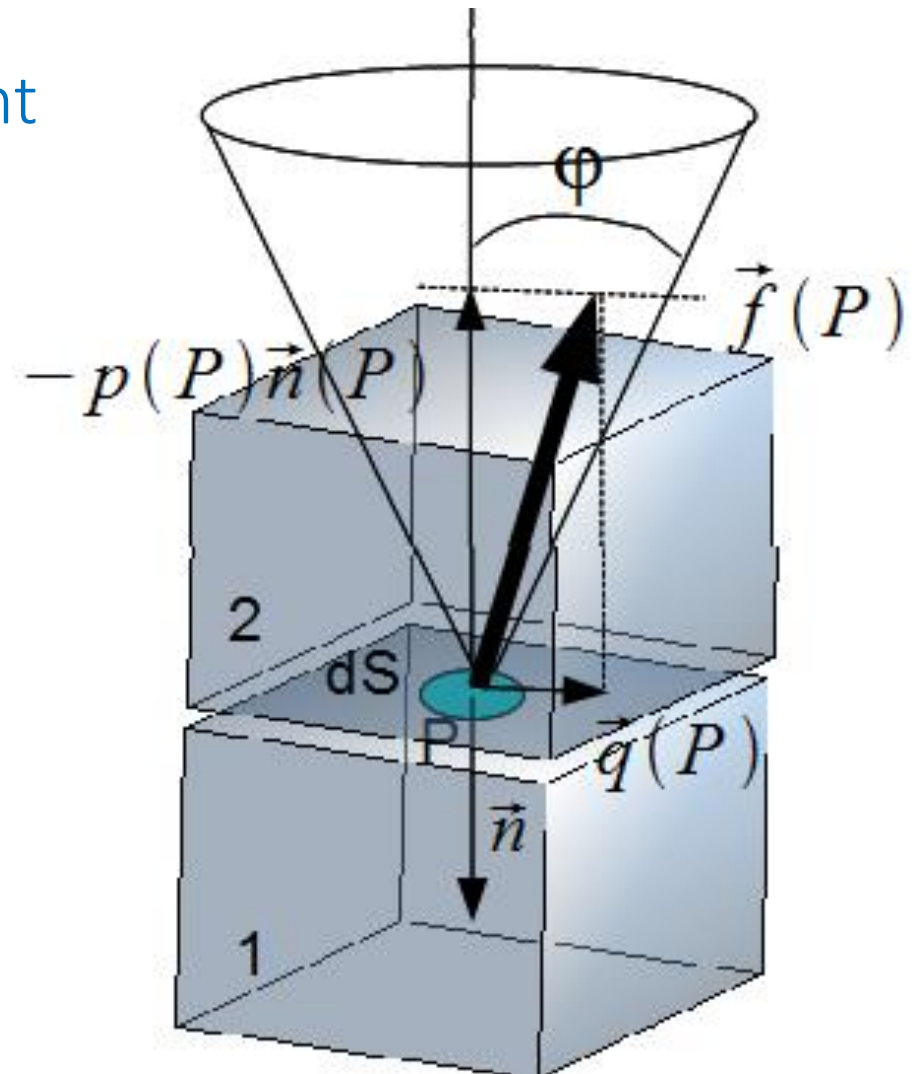
Contact surfacique ou linéique avec frottement

Lois de Coulomb locales

Cas du glissement :  $\overrightarrow{V_{P \in 2/1}} \neq \vec{0}$

- $\vec{q}(P)$  opposé au vecteur vitesse de glissement  $\overrightarrow{V_{P \in 2/1}}$
- $\vec{q}(P) = -q(P) \cdot \vec{t}(P)$  avec  $q(P) > 0$

$q(P) = f \cdot p(P)$  ( $f$  coefficient de frottement)



# Modélisation locale des actions mécaniques de contact avec frottement

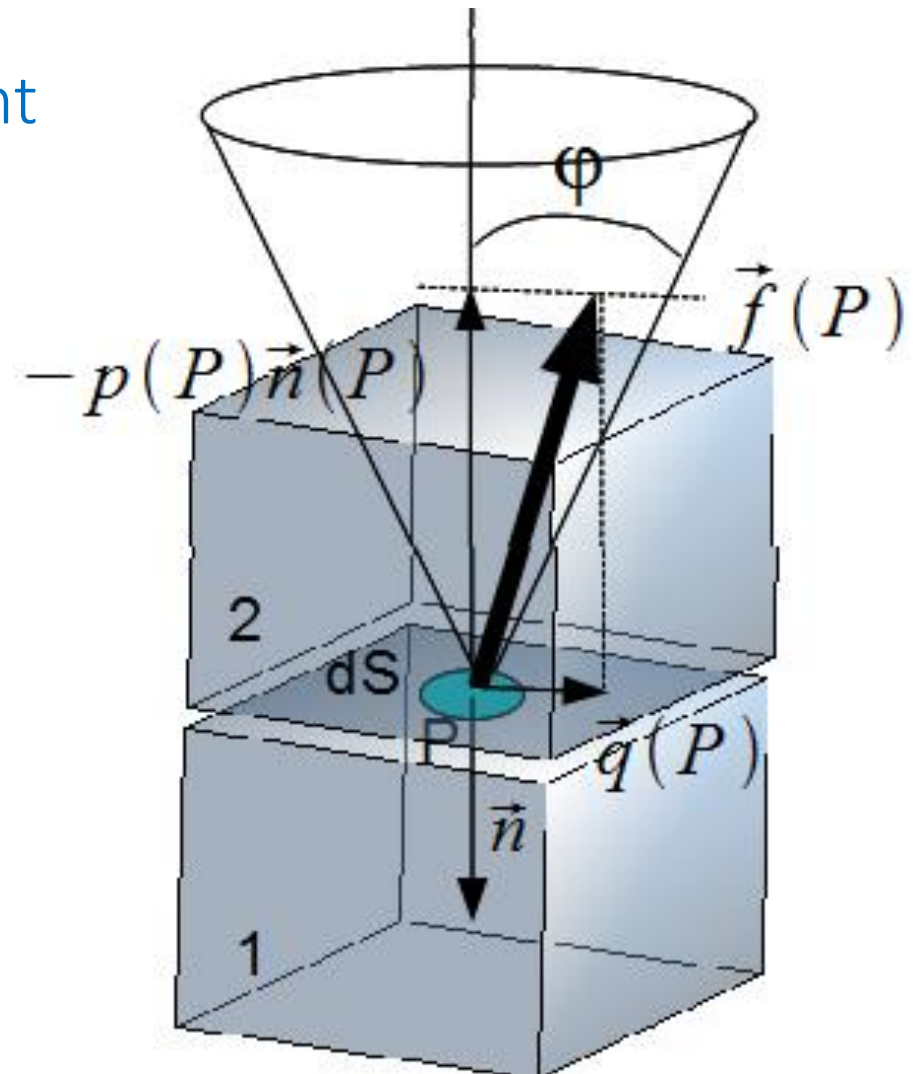
Contact surfacique ou linéique avec frottement

Lois de Coulomb locales

Cas du non glissement :  $\overrightarrow{V_{P \in 2/1}} = \vec{0}$

Connaît direction de  $\vec{q}(P)$

$q(P) < f \cdot p(P)$  ( $f$  coefficient de frottement)





# Modélisation locale des actions mécaniques de contact avec frottement

Contact surfacique ou linéique avec frottement

De l'action mécanique locale à l'action mécanique globale

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R}_{1 \rightarrow 2} = \int_{\Omega} [-p(P) \cdot \vec{n}(P) + \vec{q}(P)] d\Omega \\ \overrightarrow{M}_{A,1 \rightarrow 2} = \int_{\Omega} \overrightarrow{AP} \wedge [-p(P) \cdot \vec{n}(P) + \vec{q}(P)] d\Omega \end{array} \right\}_A$$

# Modélisation locale des actions mécaniques de contact avec frottement

Contact surfacique ou linéique avec frottement

*Frottement fluide local*

Le frottement visqueux local  $\rightarrow$  même théorie que le frottement visqueux global

Effort local de type amortisseur :

$$\vec{p}(P) = -k \cdot \vec{v}$$

$k$  coefficient de l'amortissement local (N.s/m<sup>3</sup>).